

शासकीय नवीन महाविद्यालय - वारी, जिला दुर्ग (छ.ग.)

आंतरिक मुल्यांकन परीक्षा 2021-22

B.Sc. (Part III) Mathematics

Paper - Second

Abstract Algebra

नोट: प्रत्येक प्रश्न से कोई दो प्रश्न हल कीजिए।
सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। हंक इंक समान हैं।

Maximum marks : 50

(UNIT-1)

- ① मान लो R^+ सभी धन वास्तविक संख्याओं का गुणात्मक समूह है। $f: R^+ \rightarrow R^+$ को $f(x) = x^2$, $\forall x \in R^+$ से परिभाषित करते हैं। सिद्ध कीजिए कि f एक स्वाकारिता है।
- ② दर्शाइए कि $x \rightarrow x^{-1}$ एक समूह G का एक स्वाकारिता है, यदि और केवल यदि G आबेली है।
- ③ यदि $o(G) = 56$, तो सिद्ध कीजिए कि G , 1 या 8 सितो उपसमूह रखता है। अन्य की स्थिति में सिद्ध करो कि G एक प्रसमान्य 2-सितो उपसमूह रखता है।

(UNIT-2)

- ① वलय को परिभाषित कीजिए तथा इससे कि प्रत्येक क्रमविनियम वलय का समाकारी परिविनियम भी क्रमविनियम वलय होता है।
- ② सिद्ध कीजिए कि वलय $(R, +, \cdot)$ की दो गुणजावतियों का सर्वनिष्ठ R की एक गुणजावती होता है।
- ③ यदि $f(x) = 3x^0 + 4x + 2x^2$ तथा $g(x) = 1x^0 + 3x + 4x^2 + 2x^3$ वलय $(I_5, +_5, \cdot_5)$ पर कोई दो बहुपद हो, तो सात कीजिए।
 - (i) $f(x) + g(x)$
 - (ii) $f(x) \cdot g(x)$

(UNIT-3)

- ① किसी सदिश समष्टि $V(F)$ के एक अविकल उपसमुच्चय W के लिए V का एक उपसमष्टि होने के लिए आवश्यक एवं पर्याप्त प्रतिबंध हैं।
 - ① $\alpha \in W, \beta \in W \Rightarrow \alpha - \beta \in W$
 - ② $\alpha \in F, \beta \in W \Rightarrow \alpha\beta \in W$

(2) जांच कीजिए कि सदिशों $(2, 3, -1)$, $(-1, 4, -2)$ एवं $(1, 18, -4)$ का समुच्चय सदिश समष्टि $V_3(\mathbb{R})$ में रैखिक रूप से स्वतंत्र है या परतंत्र।

(3) यदि W_1 और W_2 एक परिमित विमीय सदिश समष्टि $V(F)$ की दो उपसमष्टियाँ हैं, तो सिद्ध कीजिए कि

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2).$$

(UNIT-4)

(1) माना कि \mathbb{R}^3 पर T एक रैखिक संकारक है, जो $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, -x_1, -x_2 - 4x_3, 2x_1 - x_3)$ से परिभाषित है। आधार $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ जहाँ $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (0, 1, 1)$, $v_3 = (1, 0, 1)$ है, के सापेक्ष T का आव्यूह प्राप्त कीजिए।

(2) किसी आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ के आइगेन मानों के संगत सभी आइगेन स्रोतों की खोज कीजिए।

(3) लैंग्रान्ज के समानथन विधि से द्विघाती समघात $q = x_1^2 + 2x_2^2 - 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3$ को विहित समघात स्रोत में समानथन कीजिए। ध्यान दें, सूचकांक और चिन्हों का सात कीजिए।

(UNIT-5)

① यदि α और β किसी आंतर गुणक समष्टि $V(F)$ के सदिश हैं, तब दिखाएँ कि -

$$\|\alpha + \beta\|^2 + \|\alpha - \beta\|^2 = 2\|\alpha\|^2 + 2\|\beta\|^2$$

② $V_4(R)$ के शैक्षकतः स्वतंत्र सदिशों का समुच्चय-

$B = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ का प्रसमाप्य लाभिक समुच्चय सात कीजिए, जहाँ

$$\beta_1 = (1, 0, 1, 1)$$

$$\beta_2 = (-1, 0, -1, 1)$$

$$\beta_3 = (0, -1, 1, 1)$$

③ माना $V(C)$ किसी अंतराल $0 \leq t \leq 1$ पर सभी सतत समिश्र मानक फलनों का सदिश समष्टि है। यदि $f(t), g(t) \in V$

तथा $\int_0^1 f(t) \cdot \overline{g(t)} dt$ तब सिद्ध कीजिए कि V आंतर गुणक समष्टि है।

————— x —————