

शासकीय लवीन महाविद्यालय - वारी, जिला - दुर्ग (छ. ग.)

आंतरिक मूल्यांकन परीक्षा 2021-22

B.Sc (Part-III) Mathematics

Paper - first

Analysis

नोट : प्रत्येक Unit से कोई दो प्रश्न हल कीजिए।
सभी Unit अनिवार्य हैं एवं अंक समान हैं।

maximum marks : 50

(UNIT-1)

- ① यंग प्रमेय (Young's theorem) लिखिए तथा सिद्ध कीजिए।
- ② दर्शाइए कि फलन $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

मूलबिंदु पर अवकलनीय नहीं है यद्यपि $(0, 0)$ पर
आंशिक अवकलनो $\frac{\partial f}{\partial x}$ और $\frac{\partial f}{\partial y}$ का अस्तित्व है।

- ③ फलन $f(x) = x \cos x$ के लिए अन्तराल
 $(-\pi, \pi)$ में फूरियर श्रृंखला प्राप्त कीजिए।

(UNIT-2)

- ① $\int_0^2 \frac{\log x}{\sqrt{2-x}} dx$ के अभिसरण के लिए परीक्षण करें।

② (first fundamental theorem of calculus)
अथवा समाकल गणित का मूलभूत प्रमेय - माना कि

$f \in R[a, b]$ तब $[a, b]$ पर परिभाषित फलन F ,

जहाँ $F(x) = \int_a^x f(t) dt$,

तथा $f, x_0 \in [a, b]$ पर सतत है तब,

$$F'(x_0) = f(x_0)$$

③ प्रायल के सापेक्ष अवकलन की सहायता से
दर्शाये कि -

$$\int_0^{\infty} \frac{\tan^{-1}(ax)}{x(1+x^2)} dx = \frac{\pi}{2} \log(1+a)$$

यदि $a \geq 0$.

(UNIT-3)

① यदि $f(z) = u + iv$ एक विश्लेषिक फलन है तथा
 $z = re^{i\theta}$, जहाँ u, v, r, θ सभी वास्तविक हैं,
दर्शाये कि कोशी-रीमान समी.

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}$$

तथा $\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$

② उस मोबियस रूपांतरण को ज्ञात कीजिए जो, बिंदुओं $z_1 = 2$, $z_2 = i$, $z_3 = -2$ को बिंदुओं $w_1 = -1$, $w_2 = i$ तथा $w_3 = -1$ में परिवर्तित प्रतिबिम्बित करता है।

③ दर्शाइए कि रूपांतरण $w = \frac{2z+3}{z-4}$, शून्य $x^2 + y^2 - 4x = 0$ को सरल रेखा $4u+3=0$ पर प्रतिबिम्बित करता है। बताइए कि कौन से रूपांतरण पश्चात् वृत्त नहीं प्राप्त होता?

(UNIT-4)

- ① सिद्ध कीजिए कि किसी द्वीक समष्टि में प्रत्येक संवृत गोलाक एक संवृत समुच्चय होता है।
- ② दर्शाइए कि $\sqrt{8}$ एक परिमेय संख्या नहीं है।
- ③ आर्किमिडीय प्रमेय (The Archimedean property) - यदि x और y दो दी गई वास्तविक संख्याएँ हैं तथा $x < y$ तो एक ऐसी प्राकृत संख्या n का अस्तित्व है कि $nx > y$.

(UNIT-5)

- ① सिद्ध कीजिए किसी संवद्ध समुच्चय का संतत प्रतिचित्रण भी संवद्ध होता है।
- ② सिद्ध कीजिए कि किसी संतत दूरीक समष्टि का एक संवृत्त असमुच्चय संतत होता है।
- ③ मान लीजिए (X, d) एक द्वितीय गणनीय समष्टि है। यदि X में एक अक्रिय विवृत्त समुच्चय A विवृत्त समुच्चयों के वर्ग $\{A_i : i \in I\}$ के संघ के रूप में व्यक्त है, तो A के $A_i : I$ के गणनीय संघ के रूप में व्यक्त कर सकते हैं।

————— x —————